第10讲 无理方程

**知识梳理**

**1．无理方程**

方程中含有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，且\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_是含有未知数的代数式，这样的方程叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.无理方程也叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

整式方程和分式方程统称为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

有理方程和无理方程统称为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，简称代数方程.



**2．解无理方程的基本方法：**两边平方法和换元法

**3．解简单的无理方程的基本步骤：**

**4．无理方程的解的讨论**

(1)无理方程**有实数根**：

①无理方程去根号后化为的有理方程有实数根；

②这些实数根不都是原无理方程的增根.

(2)无理方程**只有一个实数根**：

①无理方程去根号后化为的有理方程有两个相等的实数根(2次)或一个实数根(1次)，且不是原方程的增根；

②这个有理方程有两个不相等的实数根，且其中的一个实数根是增根.

**典型解析**

**例1**：在方程中，哪些是无理方程？

**解.**方程中尽管含有根式，但根式的被开方数不含有未知数，所以不是无理方程，而是一元一次方程；方程都是无理方程.

**【变式训练】**

1．下列关于*x*的方程中是无理方程的有( )个.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：D

2．下列说法不正确的是( )

A．=-1是无理方程 B．=5是无理方程

C．=3是无理方程 D．=3是分式方程

答案：D

**例2：**不解方程，试说明下列方程为什么无实数根？

**解**.(1)若原方程有实数根，则即-(*x*2+1)≥0.

又因为对于任意实数*x*，总有*x*2≥0，所以*x*2+1≥1.

因此-(*x*2+1)≤-1<0，与-(*x*2+1)≥0矛盾.

所以，方程无实数根.

(2)若原方程有实数根，则被开方数*x*≥0且-*x*≥0.

解得*x*≥0且*x*≤0.

所以*x*=0.

但当*x*=0时，方程左边=√0+√(-0)=0，右边=1，左边≠右边，因此*x*=0不是原方程的根.

所以，方程无实数根.

(3)若原方程有实数根，则因此与矛盾，

所以，方程无实数根.

(4)若原方程有实数根，因为对于任意实数*x*，总有*x*2≥0，因此2>1，与矛盾.

所以，方程无实数根，

利用二次根式√*a*≥0以及被开方数*a*≥0，是直接判断无理方程无实数根的有效方法，也是以后检验无理方程的根的有效方法.

**【变式训练】**

不解方程，说明下列方程是否有实数根：

答案：(1)有实数根，实数根为*x*=12

(2)当*a*=*b*时，则*a*-*b*=0，即0=0.此时*x*取*x*2-4*x*≥0的一切实数根，即原方程的根是*x*≥4或*x*≤0的一切实数；

当*a*<*b*时，则*a*-*b*<0，此时原方程无实数根

**例3：解下列方程：**

(1) ； (2)；

(3)(𝑥 + 2)= 0； (4)

解：(1)两边平方，得2*x*+3=*x*2.

整理，得*x*2-2*x*-3=0.

解得*x*1=3，*x*2=-1.

检验：把*x*=3代入原方程的两边，左边=

右边=3，左边=右边，

因此*x*=3是原方程的根；

把*x*=-1代入原方程的两边，左边=

右边=-1，左边≠右边，因此*x*=-1是增根，舍去，

所以，原方程的根是*x*=3.

(4)原方程可变形为

两边平方，得

(*x*-1)(2*x*+6)=(*x*+3)2.

整理，得*x*2-2*x*-15=0.

解得*x*1=5，*x*2=-3.

检验：把*x*=5代入原方程的两边，左边=右边=3，左边=右边，因此*x*=5是原方程的根；

把*x*=-3代入原方程的两边，左边根号内的数是负数，由于在实数范围内负数没有平方根，因此*x*=-3是增根，舍去.

所以，原方程的根是*x*=5.

**例4：解下列方程：**

(1) ； (2).

**解**.(1)两边平方，得

整理，得

再两边平方，得*x*2-20*x*+100=4(*x*+5).

整理，得*x*2-24*x*+80=0.

解得*x*1=20，*x*2=4.

检验：把*x*=20代入原方程的两边，左边=右边6，左边=右边，因此*x*=20是原方程的根；

把*x*=4代入原方程的两边，左边=右边=左边≠右边，因此*x*=4是增根，舍去.

所以，原方程的根是*x*=20.

(2) 两边平方，得

整理，得

再两边平方，得4*x*2-16*x*+16=(2*x*-1)(*x*-1).

整理，得2*x*2-13*x*+15=0.

解得*x*2=5.

检验：把代入方程两边，左边左边≠右边，因此是增根，舍去；

把*x*=5代入方程两边，左边=右边=边=右边，因此*x*=5是原方程的根.

所以，原方程的根是*x*=3.

**例5：**解下列方程：

**解：**(1)设则原方程可化为*y*2+5*y*=6(*y*≥0).

整理，得*y*2+5*y*-6=0

解得*y*1=1，*y*2=-6.

当*y*=1时，解得或*x*=-1.经检验，或*x*=-1都是原方程的根；

当*y*=-6时，与*y*≥0矛盾，因此*y*=-6舍去.

所以，原方程的根是*x*2=-1.

(2)原方程整理得

设则原方程可化为

解得*y*1=1，

当*y*=1时，解得*x*=0或*x*=-5.经检验，*x*=0或*x*=-5都是原方程的根；

当时，与*y*≥0矛盾，因此舍去.

所以，原方程的根是*x*1=0，*x*2=-5.

**例6：**已知关于*x*的方程有一个增根*x*=4.求：(1)*a*的值；(2)方程的根.

无理方程的增根是无理方程去根号后化为的有理方程的根，而不是原无理方程的根，因此，应该把增根*x*=4代入无理方程去根号后化为的有理方程.

**解：**原方程变形为

两边平方，得

整理，得

两边再平方，得

把*x*=4代入方程①，得(4-*a*-5)2=4(4+*a*).

整理，得*a*2-2*a*-15=0.

解得*a*1=5，*a*2=-3.

当*a*=5时，原方程为

解得*x*1=20，*x*2=4.

经检验，*x*=4是方程②的增根，*x*=20是方程②的根.

当*a*=-3时，原方程为

此时*x*=4为原方程的根，与原方程有增根*x*=4矛盾，因此*a*=-3不满足题意，舍去.

所以，当*a*=5时，原方程的根为*x*=20.

**例7：**若关于*x*的无理方程有实数根，求*k*的取值范围.

**分析.**无理方程有实数根应该满足：(1)无理方程去根号后化为的有理方程有实数根；(2)这些实数根不都是原无理方程的增根.

**解**原方程变形为

两边平方得4-2*x*=*k*2*x*2-4*kx*+4.

整理，得*k*2*x*2+(2-4*k*)*x*=0.

因为原方程有实数根，所以方程①有实数根.

(1)当*k*2=0时，即*k*=0时，方程①可化为2*x*=0.

解得*x*=0.

经检验，*x*=0是原方程的增根，

所以，*k*=0不符合题意，舍去.

(2)当*k*2≠0时，即*k*≠0时，解方程①，得*x*1=0，

把*x*=0代人原方程两边，得左边=

右边=0，左边≠右边，所以*x*=0是原方程的增根.

因为原方程有实数根，

所以必为原方程的根，把代入原方程，整理，得

所以

因此，或

解得*k*≥1或*k*<0.

综上所述，当*k*≥1或*k*<0时，关于*x*的无理方程有实数根.

**例8：**若关于*x*的方程只有一个实数根，求*m*的范围.

**分析**.无理方程只有一个实数根，说明原无理方程去根号后化为的有理方程有两个相等的实数根(如果这个有理方程是一元一次方程，那么这个有理方程有一个实数根)，且这两个相等的实数根不是原方程的增根；或者这个有理方程有两个不相等的实数根，且其中的一个实数根是增根.

**解**.原方程变形为

设则方程①可化为2*t*2+*t*+*m*-6=0.②

(1)若方程②有两个相等的实数根，则△=0，即1-8(*m*-6)=0.

解得

设方程②的两个实数根为*t*1和*t*2，则

所以，方程②有两个相等的负数根，即与矛盾，

因此，舍去.

(2)若方程有一非负一负两根，则解得*m*≤6.

综上所述，当*m*≤6时，关于*x*的方程只有一个实数根.

**同步训练**

**一、填空题**

1．在方程①+*x*=0，中，是无理方程的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.(只要填写方程的序号)

答案：①②④

2．(1)将无理方程化为有理方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)将无理方程化为有理方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)将无理方程化为整式方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)*x*2=15；(2)*x*=4；(3)2*x*+3=(*x*+2)2或*x*2+2*x*+1=0

3．无理方程中未知数的允许取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，因此无理方程去根号化为有理方程后，未知数的允许取值范围\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_了，因而解无理方程必须进行\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*≥0；扩大；验根

4．(1)无理方程有一个根为*x*=1，则*k*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；另一个根为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)无理方程的根为*x*=3，则*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)3；*x*=-1；(2)0

5．已知函数*f*(*x*)=，如果*f*(*a*+1)=2，则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

6．(1)用换元法解方程时，可设\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=*y*，那么原方程可化为关于*y*的整式方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)用换元法解方程时，可设\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=*y*，那么原方程可化为关于*y*的整式方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)；*y*2=4*y*+1=0；(2)；*y*2-*y*-2=0

7．请编写一个无理方程，使其根是-1，有增根3，你写的这个方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

8．(1)关于*x*的无理方程没有实数根，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)若关于*x*的无理方程有实数根，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)*k*<-1；(2)*k*≤0

**二、选择题**

9．已知方程：其中有实数根的有( )个.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)1

答案：D

10．下列说法正确的是( )

(A)无理方程的解是*x*1=-1，*x*2=3

(B)无理方程的解是*x*1=-1，*x*2=-7

(C)无理方程无解

(D)无理方程与整式方程同解

答案：C

**三、解答题**

11．解无理方程：

；

答案：(1)*x*1=7，*x*2=-2；(2)无解；(3)*x*=22；(4)*y*≥4；(5)*x*=(6)*y*=±4；(7)*x*=73；(8)*x*=2

12．用换元法解无理方程：

答案：(1)*x*1=1，*x*2=-4；(2)*x*1=0，*x*2=3

13．(1)若关于*x*的方程有实数根，求*k*的取值范围；

(2)若关于*x*的方程有两个不相等的实数根，求*p*的取值范围.

答案：(1)*k*≤-提示：因为*x*2-2*x*+3=(*x*-1)2+2，所以所以-*k*≥*k*≤-(2)-1<*p*≤0.提示：因为=-*x*≥0，所以*x*≤0；又因为*x*2+2*x*-*p*=0，Δ=4+4*p*>0，所以，*p*>-1且-*p*≥0，所以-1<*p*≤0

14．已知点*A*是*y*轴上的点，它与点*B*(5，2)的距离为13，求点*A*的坐标.

15．设点*P*是直线*y*=*x*-1上的一点，它到点*A*(2，-3)的距离等于6，若点*P*在第三象限，问这样的点*P*是否存在？若存在，求出点*P*的坐标，若不存在请说明理由.

16．(1)若正数*x*，*y*满足2*x*-3-2*y*=0，求.

(2)已知，求*x*-*y*的值.

答案：(2)

**走进中考**

1．(2017·上海中考)方程的根是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*x*=2

2．(2016·上海中考)方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*x*=5

3．(2015·上海中考)方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*x*=2